**6В**

**УДК 517.997.56**

***Н.А. Володин*[1], *В.К. Толстых*[2]**
[1]Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина
nvolodin@yandex.ru
[2]Донецкий национальный университет, Украина
tvk@dongu.donetsk.ua

# О сходимости экстремальных методов в бесконечномерных задачах оптимизации с параболическим уравнением

В статье рассматривается сходимость экстремальных методов в задаче оптимизации системы с квазилинейным параболическим уравнением. На примере бесконечномерной минимизации квадратичного целевого функционала показано, что традиционные методы, включающие методы наискорейшего спуска, монотонного убывания и сопряженных градиентов, сходятся не равномерно. Равномерной сходимости позволяет добиться прямой экстремальный метод с регулируемым направлением спуска.

Рассмотрим проблемы сходимости классических экстремальных методов на примере задачи оптимального управления тепловым потоком вдоль вертикального непрерывного цилиндрического слитка. Это одна их актуальных задач металлургии. Установившиеся тепловые процессы в таких задачах можно описать следующим квазилинейным параболическим уравнением:

$$\alpha(T)\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\beta(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,\quad (r,z)\in\Omega=[0,R]x[0,Z] \qquad (1)$$

с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{\substack{r=0\\0<z<Z}}=0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{S}=u(z),\ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{S_1}=-\gamma(T-T_1),\ \left.T\right|_{\substack{0\le r\le R\\z=0}}=T_0\,. \qquad (2)$$

Здесь $S=\{r,z:r=R,z_1<z<Z\}$ – область определения управляемого теплового потока $u(z)$, влияющего на качество слитка, $S_1=R\times[0,z_1]$ – область интенсивного заданного (не управляемого) охлаждения слитка, $T$ – температура в слитке, $R$ – радиус слитка. Все остальные параметры уравнения (1) и граничных условий (2) – $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $\gamma$, $T_0$, $T_1$ – считаем известными и корректно заданными [1].

Тестовую задачу оптимального управления сформулируем как задачу синтеза заданной температуры $T_*(r,z)$ в части слитка $[0,R]\times[z_1,Z]$. Необходимо в граничном условии (2) найти функцию $u(z)$, доставляющую минимум целевому функционалу

$$J=\int_0^R\int_{z_1}^Z\left(T-T_*\right)^2 rdrdz\,. \qquad (3)$$

Тестовые расчеты организовывались следующим образом. Задавалось граничное управление $u(z)$, которое считалось оптимальным $u_*(z)$, и по уравнению (1) с

граничными условиями (2) рассчитывалась соответствующее $T_*(r,z)$. Далее предполагалось, что $u_*(z)$ неизвестно и для его определения необходимо решить бесконечномерную экстремальную задачу

$$J(u(z)) \to \min .$$

Для минимизации на открытых множествах управлений, обычно, используют итерационные градиентные методы [2-4]:

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k \nabla J(u^k; z) \text{ на } S, \quad b^k > 0,\ k = 0,1,\ldots . \tag{4}$$

В случае выбора параметра шага $b^k$ из условия наилучшего продвижения в заданном направлении минимизации $-\nabla J(u^k; z)$, типа

$$b^k = \arg\min_b (u^k - b\nabla J(u^k; z)),$$

мы имеем метод наискорейшего спуска.

В результате применения методики, изложенной в работе [5], применительно к целевому функционалу (3) был получен градиент $\nabla J$, который определяется из выражения:

$$\nabla J(u^k; z) \equiv \nabla J^k = -h, \tag{5}$$

где сопряженная переменная $h(r,z)$ удовлетворяет следующей сопряженной задаче:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left( r\beta(T)\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \alpha(T)\frac{\partial h}{\partial z} - \\ - \frac{\partial \beta(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial \alpha(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} h + 2(T - T_*) = 0,\ (r,z) \in \Omega . \tag{6}$$

Граничные условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{\substack{r=0\\0<z<Z}} = 0,\ \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{S_1} = -\gamma h,\ \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{S} = 0,\ h\big|_{z=Z} = 0 . \tag{7}$$

Метод наискорейшего спуска (4) для минимизации функционала $J(u)$ реализовывался приблизительно с условием:

$$\begin{cases} \text{если } J^{k+1} \le J^k, & \text{тогда } b^{k+1} = b_1 b^k,\ b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k, & \text{тогда повторяется предыдущая итерация, при } b^{k-1} = b_2 b^k;\ 0 < b_2 < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Принималось $b_1 = 1{,}2$, $b_2 = 0{,}5$, $b^0$ задавалось из условия не более 20 % первого изменения функции $u(z)$ на первой итерации [5], [6]:

$$b_0 = \min_z \left| \frac{0{,}2u^0(z)}{\nabla J(u^0; z)} \right| . \tag{9}$$

На рис. 1 показана сходимость функции $u(z)$ от начального приближения $u^0(z) = 200$ кДж/(м$^2$с) к точному решению $u_*$ на 5, 15 и 100 итерациях. Видно, что градиентный метод наискорейшего спуска (его приблизительная реализация) (4), (8) не сходится к точному решению $u_*$ за значительное число итераций. От итерации к итерации сходимость метода существенно замедляется. В табл. 1 приведены некоторые значения целевого функционала (3) и невязки решений $\Delta u^k = \left\| u^k - u_* \right\|_{L_2(z_1, Z)}$.

Вряд ли следует ожидать существенного улучшения решения при дальнейшем увеличении числа итераций, к тому же разумным числом следует считать число итераций не более 100. После 100 итераций максимальное расхождение найденной и требуемой функции составляет $\max|T - T_*| = 42$ К.

Часто в градиентных алгоритмах минимизации используют не метод наискорейшего спуска, а так называемый метод монотонного убывания [2-4], в котором принимают параметр $b^k = b^0$ постоянным на всех итерациях. Как показывают расчеты (табл. 1), такой метод дает существенно худшие результаты. Действительно, после 100 итераций $\max|T - T_*| = 63$ К, что заметно хуже предыдущего результата.

Не удалось, по существу, улучшить решение и применением метода сопряженных градиентов

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k p^k(z), \qquad (11)$$

где $p^k = \nabla J^k - \|\nabla J^k\|^2 / \|\nabla J^{k-1}\|^2 p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$.

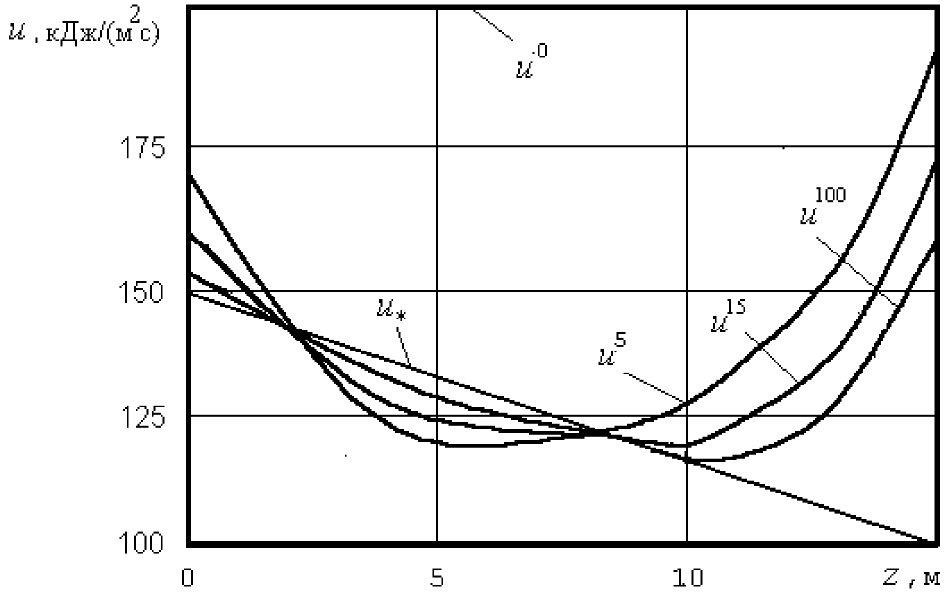



Рисунок 1 – Сходимость функции $u(z)$ к точному решению $u_*(z)$ при использовании метода (4), (8)

Решение данным методом представлено в табл. 1 и на рис. 2. Здесь $b_2 = 0{,}4$. Кроме того, нижняя строка условия (8), для очищения направления $p^k$ от накапливающихся погрешностей, дополнялась на каждой 5-й итерации условием $p^{k-1} = \nabla J^{k-1}$. Минимизация методом сопряженных градиентов практически заканчивалась для 100 итераций. В сравнении с предыдущими методами он не существенно изменил невязку $\Delta u^k$, что наглядно демонстрирует рис. 2, однако уменьшил максимальное расхождение найденной и требуемой функции $T(r,z)$, которое составило $\max|T - T_*| = 37$ К после тех же 100 итераций.

Таким образом, применение классических экстремальных методов для минимизации целевого функционала $J$ в рассматриваемой задаче оптимизации с параболическим уравнением свидетельствуют о низкой эффективности данных методов. Как следует из рис. 1, 2, точное решение недостижимо за значительное число итераций.

Таблица 1 – Минимизация целевого функционала $J$ различными экстремальными алгоритмами

| Итерация | Метод наискорейшего спуска | | Метод монотонного убывания | | Метод сопряженных градиентов | | Метод с регулируемым направлением спуска | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $J^k, 10^5$ | $\Delta u, 10^4$ | $J^k, 10^5$ | $\Delta u, 10^4$ | $J^k, 10^5$ | $\Delta u, 10^4$ | $J^k, 10^5$ | $\Delta u, 10^4$ |
| 0 | 33000 | 19 | 33000 | 19 | 33000 | 19 | 33000 | 19 |
| 10 | 78 | 6,5 | 300 | 9,8 | 31 | 5,4 | 0,92 | 0,3 |
| 20 | 14 | 4,5 | 130 | 7,9 | 4,2 | 3,0 | 0,27 | 0,1 |
| 30 | 7,5 | 3,6 | 65 | 6,7 | 1,5 | 2,0 | 0,26 | 0,08 |
| 40 | 4,3 | 3,6 | 40 | 5,9 | 0,7 | 1,5 | 0,26 | 0,08 |
| 50 | 3,0 | 2,5 | 27 | 5,4 | 0,3 | 1,7 | 0,26 | 0,08 |
| 100 | 1,2 | 2,1 | 9,1 | 3,9 | 0,3 | 1,2 | 0,26 | 0,08 |

Теперь рассмотрим решение задачи минимизации функционала $J(u)$ прямым экстремальным методом с регулируемым направлением спуска [5], [6]:

$$u^{k+1}(z) = u^k(z) - b^k \delta^k(z) \nabla J(u^k; z) \text{ на } S, b^k > 0, k = 0,1,.... \qquad (12)$$

Функция $\delta(z)$ регулирует сходимость $u^k \to u_*$ согласно необходимому условию оптимальности [5], [6] в форме

$$\nabla J(u^k; z) \to 0 \text{ равномерно по } z \text{, при } u^k \to u_*. \qquad (13)$$

Алгоритм (12) с реализацией условия (13) позволяет решать **бесконечномерные** задачи оптимизации за конечное число итераций без преобразований управлений к конечномерным векторам.

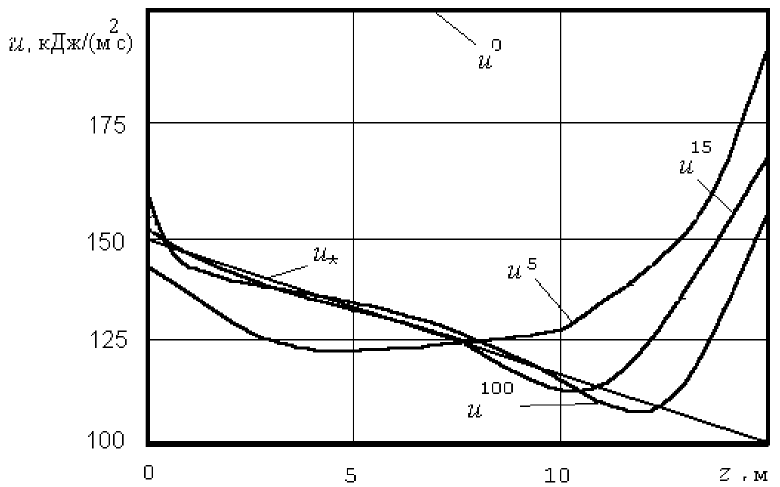



Рисунок 2 – Сходимость функции $u(z)$ к точному решению $u_*(z)$ при использовании метода (11)

Проблемы практической реализации метода (12) заключаются в выборе функций $\delta^k(z)$ для удовлетворения условия (13). Для приблизительной реализации (13) использовалась идея шаблонных приближений на первой итерации [1], [5], [6]. Пусть первое приближение $u^1(z)$ является некоторой заранее известной функцией $\varphi(z)$ (шаблонная функция), градиент которой $\nabla J(\varphi; z)$ удовлетворяет условию (13) для $k = 1$

(т.е. равномерно убывает после первой итерации). При этом из (12) можем найти

$$\delta^0(z) = \left|\frac{\varphi(z) - u^0(z)}{\nabla J(u^0; z)}\right|, \ \nabla J(u^0; z) \neq 0 \ \forall z \in S .$$

На следующих итерациях параметр $\alpha(z)$ не меняется. В данном методе от исследователя потребуется сделать несколько пробных первых итераций для подбора подходящей шаблонной функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей (13). В рассматриваемой задаче было выбрано $\varphi(z) = 0{,}2u^0(z)$.

Здесь глубина спуска на каждой итерации вдоль выбранного направления минимизации $\delta^k(z)\nabla J(u^k; z)$ определяется числом $b^k$ по методу (8). Если $\delta^k(z) = 1$, то алгоритм (12) принимает вид алгоритма метода наискорейшего спуска (4). Функция $\delta^k(z)$ регулирует направление спуска и определяется на первой итерации из условия не более 20 % изменения функции $u(z)$:

$$\delta^k(z) = \left|\frac{0{,}2u^0(z)}{\nabla J(u^0; z)}\right|. \qquad (14)$$

Решение представлено в табл. 1, а на рис. 3 показана сходимость искомой функции к оптимальному значению $u_*$ для итераций 5, 10, 20. На последней итерации решение практически совпадает с точным тестовым значением $u_*$ при максимальном расхождении найденной и оптимальной функций $\max|T - T_*| = 0{,}3$ К.

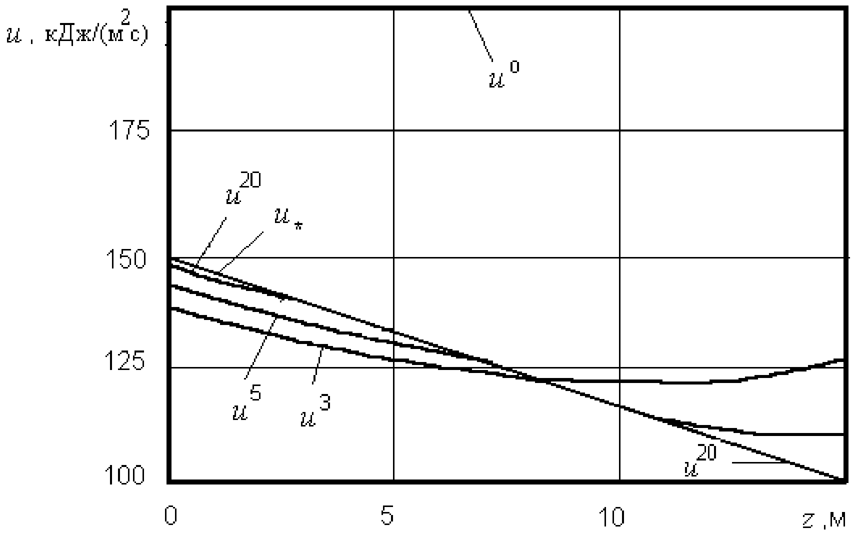



Рисунок 3 – Сходимость функции $u(z)$ к точному решению $u_*(z)$ при использовании метода (12)

Имеется быстрая равномерная сходимость, в отличие от традиционных алгоритмов минимизации (4), (11). Из табл. 1 видно, что всего за 20 итераций целевой функционал $J$ уменьшился в $12{,}2 \cdot 10^4$ раз, а невязка решений $\Delta u$ в 190 раз, что демонстрирует принципиально лучший результат, по сравнению с традиционными методами минимизации (4), (11).

Данные результаты подтверждают высокую эффективность прямого экстремального метода (12) для решения задач. Метод (12) на несколько порядков лучше минимизирует целевой функционал по сравнению с традиционными методами при тех же вычислительных затратах.

Полученные результаты демонстрируют нецелесообразность, и даже некорректность применения классических экстремальных методов для минимизации функционалов, связанных с процессами, описываемыми параболическими уравнениями. С другой стороны, экстремальные алгоритмы с регулируемым направлением спуска [5] типа метода (12) можно считать эффективными и рекомендовать их для решения подобных задач.

# Литература


1. Толстых В.К., Володин Н.А., Черноног В.Е. Оптимальное управление потоком тепла в затвердевающем металле, находящемся в многофазном состоянии, с целью улучшения характеристик твердой фазы // Теплофизика высоких температур. – 2003. – Т. 41, № 3. – С. 461-464.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
3. Nocedal J. and S. J Wright. Numerical Optimization. – New York, Springer-Verlag: 1999.
4. Kelly C. T. Iterative Methods for Optimization. – Philadelphia, SIAM: 1999.
5. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. – Донецк: Юго-Восток, 1997. – 177 с.
6. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов // Инженерно-физический журнал. – 2003. – Т. 76, № 2. – С. 160-162.



***М.О. Володін, В.К. Толстих***

**Про збіжність екстремальних методів в нескінченновимірних задачах оптимізації з параболічним рівнянням**

У статті розглядається збіжність екстремальних методів у задачі оптимізації системи з квазілінейним параболічним рівнянням. На прикладі нескінченновимірної мінімізації квадратичного цільового функціоналу показано, що традиційні методи, що включають методи найшвидшого спуску, монотонного спадання і зв’язаних градієнтів, збігаються не рівномірно. Рівномірної збіжності дозволяє досягти прямий екстремальний метод з регульованим напрямом спуску.



***N.A. Volodin, V.K. Tolstykh***

**About Convergence of Extreme Methods Tasks of Optimization in Space Endlessness with Parabolic Equalization**

Convergence of extreme methods is examined in the task of optimization of the system with nonlinear by parabolic equalization. It is rotined on the example of minimization in space endlessness of quadratic having a special purpose functional, that traditional methods, including the methods of the method of the rapid lowering, monotonous decrease and attended gradients, meet not evenly. Allows even convergence to obtain a line extreme method with the managed direction of lowering.


*Статья поступила в редакцию 10.11.2008.*